جامعة البعث | امتحان مقرر المعادلات التفاضلية 1 | الاسم:

كلية العلوم | لطلاب السنة الثانية إحصاء | الدرجة: (100)

قسم الرياضيات | الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 – 2017 | المدة: ساعة ونصف



<u>السؤال الأول(30 درجة):</u>

جد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$1)\ \frac{dx}{\sin^2 x \sin y} - \tan x \cos y dy = 0$$

$$2)\ y' - \frac{1}{x} y = y^2 e^{-x}$$

<u>السؤال الثاني(20 درجة):</u>

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\left(x + y e^{\frac{y}{x}}\right) dx - x e^{\frac{y}{x}} dy = 0$$

والمحقق للشرط $y(0) = 1$.

<u>السؤال الثالث(25 درجة):</u>

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية علماً أنها تقبل عامل تكميل يتعلق بـ $x \cdot y$:

$$y dx + \left(x - 3x^2 y^2\right) dy = 0$$

<u>السؤال الرابع(25 درجة):</u>

جد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y + x y' = y'^2$$

✲ ✲

حمص 15\6\2017 م | **مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح** | **د. ميسون زين الدين**

جواب السؤال الأول (30 درجة) :

المعادلة الأولى:

$$\frac{dx}{\sin^2 x \sin y} - \tan x \cos y dy = 0$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة ترد إلى معادلة تفاضلية منفصلة المتحولات بعد ضرب طرفيها بالمقدار $\frac{\sin y}{\tan x} \neq 0$ أي أنَّ:

$$\frac{\sin y}{\tan x}\frac{dx}{\sin^2 x \sin y} - \frac{\sin y}{\tan x}\tan x \cos y dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x \tan x} - \sin y \cos y\, dy = 0 \Rightarrow \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} - \frac{1}{2}\sin 2y\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} - \frac{1}{2}\sin 2y\, dy = 0 \Rightarrow \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} - \frac{1}{2}\int \sin 2y\, dy = c \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\sin^2 x} - \left(-\frac{1}{4}\cos 2y\right) = c \Rightarrow -\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{4}\cos 2y = c \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos 2y - \frac{2}{\sin^2 x} = 4c}$$

المعادلة الثانية:

$$y' - \frac{1}{x}y = y^2 e^{-x}$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة برنولي ولحلها نقسم على y^2 فتصبح المعادلة المعطاة بالشكل:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{y} = e^{-x}$$

ثم نجري التحويل:

$$z = \frac{1}{y}$$

ونشتق بالنسبة لـ x فنجد أنَّ:

$$z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$$

نعوض في المعادلة الأخيرة لنجد أنَّ:

$$-z' - \frac{1}{x}z = e^{-x} \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = -e^{-x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالدالة z والمتحول المستقل x وغير متجانسة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$[x\,z]' = x\left(-e^{-x}\right) = -x\,e^{-x}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$x\,z = (x-1)e^{-x} + c \quad \Rightarrow \quad z = \frac{(x-1)e^{-x} + c}{x}$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\frac{1}{y} = \frac{(x-1)e^{-x} + c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{(x-1)e^{-x} + c} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x\,e^{x}}{(x-1) + c\,e^{x}}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

جواب السؤال الثاني(20 درجة):

إيجاد الحل الخاص للمعادلة: $\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right)dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$ والمحقق لـ $y(1) = 0$.

الحل:

إنَّ المعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$xe^{\frac{y}{x}}dy = \left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

وبقسمة طرفي المعادلة على x نجد أنَّ:

$$e^{\frac{y}{x}}dy = \left(1 + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dx$$

ومنه فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}} \Rightarrow y' = \frac{\left(1 + \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)}{e^{\frac{y}{x}}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نجري التحويل:

$$\frac{y}{x} = z \quad \Rightarrow y = x.z \quad \Rightarrow y' = x.z' + z$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أنَّ:

$$x.z' + z = \frac{\left(1 + ze^{z}\right)}{e^{z}} = \frac{1}{e^{z}} + z \quad \Rightarrow x.z' = \frac{1}{e^{z}} \Rightarrow x.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{e^{z}} \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{z}dz \Rightarrow$$
$$\ln(x) = e^{z} + c$$

وبالعودة للمتحولات القديمة نجد أنَّ:

$$\ln(x) = e^{\frac{y}{x}} + c$$

وهو الحل العام، ولإيجاد الحل الخاص المطلوب نعوض الشرط المعطى في الحل العام وهو $y(1)=0$ أي $y=0$ عندما $x=1$ ومنه نجد أنَّ:

$$\ln(1)=e^{\frac{0}{1}}+c \Rightarrow 0=1+c \Rightarrow c=-1$$

وبالتالي فإنَّ الحل الخاص المطلوب هو:

$$\boxed{\ln(x)=e^{\frac{y}{x}}-1}$$

جواب السؤال الثالث (25 درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية علماً أنها تقبل عامل تكميل يتعلق بـ $x\,.\,y$:

$$ydx+\left(x-3x^3y^3\right)dy=0$$

الحل:

لدينا من المعادلة التفاضلية المعطاة أنَّ:

$$P(x,y)=y \quad , Q(x,y)=x-3x^3y^3$$

وكما أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1-9x^2y^3$$

ومن الواضح أنَّ:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي نستنتج أنَّ المعادلة المعطاة غير تامة ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{P'_y-Q'_x}{Q\frac{\partial z}{\partial x}-P\frac{\partial z}{\partial y}}dz$$

ومن أجل $z=xy$ نجد أنَّ: $\frac{\partial z}{\partial y}=x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x}=y$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1-\left(1-9x^2y^3\right)}{y\left(x-3x^3y^3\right)-x(y)}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{9x^2y^3}{y\left(x-3x^3y^3-x\right)}dz \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{9x^2y^2}{-3x^3y^3}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3}{xy}dz \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{3}{z}dz \Rightarrow \ln\mu=-3\ln z$$

$$\ln\mu=-\ln z^3 \Rightarrow \ln\mu=\ln\left(\frac{1}{z^3}\right)\Rightarrow \mu=\frac{1}{z^3} \Rightarrow \boxed{\mu=\frac{1}{x^3y^3}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة:

$$\frac{1}{x^3y^3}y\,dx+\frac{1}{x^3y^3}\left(x-3x^3y^3\right)dy=0 \Rightarrow \frac{1}{x^3y^2}dx+\left(\frac{1}{x^2y^3}-3\right)dy=0$$

وبأخذ $x_0=1\ ,\ y_0=1$ نجد أنَّ حل المعادلة المعطاة يعطى بالشكل:

$$F(x,y)=\int_1^x P(x,y)dx+\int_1^y Q(1,y)dy=\int_1^x\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)dx+\int_1^y\left(\frac{1}{(1)^2(1)^3}-3\right)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{x^2y^2}\right]_{x=1}^{x=x}+\left[-2y\right]_{y=1}^{y=y}=-\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2}-2y+2$$

$$\boxed{F(x,y)=-\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2}-2y+2=c}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

جواب السؤال الرابع (25 درجة):

جد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y+xy'=y'^2$$

الحل:

إنَّ المعادلة التفاضلية المعطاة تكتب بالشكل:

$$y=x(-y')+y'^2$$

والمعادلة الأخيرة تملك الشكل: $y=x\varphi(y')+\psi(y')$ وهي معادلة لاغرانج ولحلها نفرض $y'=p$ ، ثم نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أنَّ:

$$y=-xp+p^2\quad\cdots\cdots\cdot(*)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$p=y'=-p-xp'+2pp'$$

ومنه نجد أنَّ:

$$2p=(-x+2p)p'\ \Rightarrow\ p'=\frac{2p}{(-x+2p)}\ \Rightarrow\ \frac{dp}{dx}=\frac{2p}{(-x+2p)}\ \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{-x+2p}{2p}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dp}=-\frac{1}{2p}x+1\ \Rightarrow\ x'=-\frac{1}{2p}x+1\ \Rightarrow\ \boxed{x'+\frac{1}{2p}x=1}$$

والمعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية وغير متجانسة بالدالة x والمتحول المستقل p ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu=e^{\int\frac{1}{2p}dp}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{1}{p}dp}=e^{\frac{1}{2}\ln p}=e^{\ln p^{\frac{1}{2}}}=p^{\frac{1}{2}}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بعامل التكميل تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\left[xp^{\frac{1}{2}}\right]'=p^{\frac{1}{2}}(1)=p^{\frac{1}{2}}$$

وبمكاملة الطرفين نجد أنَّ:

$$xp^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}p + cp^{-\frac{1}{2}}}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$y = -\left(\frac{2}{3}p + cp^{-\frac{1}{2}}\right)p + p^2 = -\frac{2}{3}p^2 + cp^{\frac{1}{2}} + p^2 = \frac{1}{3}p^2 + cp^{\frac{1}{2}}$$

مما سبق نستنتج أنَّ الحل العام وسيطياً للمعادلة المعطاة هو:

$$x = \frac{2}{3}p + cp^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad y = \frac{1}{3}p^2 + cp^{\frac{1}{2}}$$

انتهت الأجوبة

أ. أحمد حاتم أبو حاتم
0947075489